ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ FİNAL SINAVI SORULARI

Not: Sınav toplam **7** sorudan oluşmaktadır. **25.06.2021** Cuma günü **15:00-17:00** arasında gerçekleşecektir. Süre 120 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar **değerlendirilmeyecektir.** Başarılar

1) Bir (X,d) metrik uzayı için aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır? **(10 puan)**

A) Bu uzayda Cauchy dizileri sınırlıdır.
B) Bu uzayla yakınsak diziler sınırlıdır.
C) Bu uzayda Cauchy dizileri yakınsaktır.
D) Bu uzayda bir Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa kendisi de yakınsaktır.
E) Hiçbiri

2) Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur? **(10 puan)**

I. $(\mathbb{C},|.|)$ metrik uzayı tam değildir.

II. $(\mathbb{R},|.|)$ metrik uzayı tam değildir.

III. Mutlak değer metriğine göre $[-1,1]\cup\{2\}$ kümesi tamdır.

IV. $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}-\{a\}$ kümesi tam değildir.

A) I,II
B) III, IV
C) II, IV
D) II, III, IV
E) Hepsi

3) Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur? **(10 puan)**

I. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $(\mathbb{R},|.|)$ metrik uzayının yoğun bir alt kümesidir.

II. (a,b) açık aralığı, $[a,b]$ kapalı aralığının mutlak değer metriğine göre yoğun bir alt kümesidir.

III. $(\mathbb{R},|.|)$ metrik uzayı $(\mathbb{Q},|.|)$ uzayının tamlanmasıdır.

IV. (X,d) bir metrik uzay, (x_n) ve (y_n) bu uzayda iki Cauchy dizisi olmak üzere

$$(x_n)\sim(y_n)\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n)=0$$

biçiminde tanımlanan $'\sim'$ bağıntısı X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

A) I, II, III
B) I, II
C) II, III, IV
D) II, IV
E) Hepsi

4) $\mathbb{R}$ üzerine $d(x,y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|$ metriği konuyor. Aşağıdaki ifadeleri gösteriniz. **(15 puan)**

a) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n=n$ olmak üzere $(x_n)=(n)$ dizisi $(\mathbb{R},d)$ de bir Cauchy dizisidir.

b) $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayı tam değildir.

5) $f:C[-2,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_{-2}^{1}x(t)dt$ ile tanımlı f fonksiyonunun lineer ve sınırlı olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**

6) **(20 puan)**

a) $(x_1,x_2,...)\in l_2$ ise $(0,4x_1,x_2,4x_3,x_4,...)\in l_2$ olduğunu gösteriniz.

b) $T:l_2\to l_2$ lineer dönüşümü $T(x_1,x_2,...)=(0,4x_1,x_2,4x_3,x_4,...)$ şeklinde tanımlansın. T nin sürekli olduğunu gösteriniz.

c) T nin normunu bulunuz.

d) T^2 yi bulunuz.

e) $\|T^2\|$ ve $\|T\|^2$ normlarını karşılaştırınız.

7) $f,g\in C[0,1]$ için $\langle f,g\rangle=\int_0^1 e^t f(t)g(t)dt$ olsun. $C[0,1]$ uzayının $\langle .,.\rangle$ na göre iç çarpım uzayı olduğunu gösteriniz. Ayrıca $t\in[0,1]$ için $f(t)=t,\ g(t)=1-t$ şeklinde verilen f ve g fonksiyonları için $\langle f,g\rangle$ yi bulunuz. **(20 puan)**

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

MAT468 FONKSİYONEL ANALİZ, FİNAL ÇÖZÜMLERİ

1) (C) 2) (B) (3) (A)

4) $d(x,y) = \left| \dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|} \right|$.

a) $\varepsilon > 0$ verilsin. $n > m$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) = d(n,m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| = \left| \frac{n-m}{1+n} \cdot \frac{1}{1+m} \right| \leq \frac{1}{1+m}$$

olur. Eğer $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçilirse $\forall n,m > n_0$ iken $d(n,m) \leq \frac{1}{1+m} \leq \frac{1}{1+n_0} < \frac{1}{1+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} = \varepsilon$ olur.

b) $(\mathbb{R}, d)$ uzayı tam değildir: $(x_n) = (n)$ dizisi bu uzayda bir Cauchy dizisi idi. (a) da gösterildi. Fakat $\forall L \in \mathbb{R}$ sabitlenirse

$$d(x_n, L) = d(n, L) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{L}{1+L} \right| \not\to 0$$ olur.

5) $f : C[-2,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{-2}^{1} x(t)\,dt$ fonksiyonunun lineer olduğu açık. $\forall x \in C[-2,1]$ için

$$|f(x)| = \left| \int_{-2}^{1} x(t)\,dt \right| \leq \int_{-2}^{1} |x(t)|\,dt \leq \|x\|_\infty \cdot \int_{-2}^{1} dt = 3 \cdot \|x\|_\infty$$

$\Rightarrow |f(x)| \leq 3 \cdot \|x\|_\infty$ olup, $\|f\| \leq 3$, yani f sınırlıdır.

6) a) $\|(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)\|_2^2 = 16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 16|x_3|^2 + |x_4|^2 + \dots$

$$\leq 16 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \quad ((x_n) \subset \ell_2 \text{ old.})$$

$\Rightarrow (0, 4x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ dir.

b) $\|T(x_n)\|_2^2 = \|(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)\|_2^2 \leq 16 \cdot \|x_n\|_2^2$ old.

T süreklidir.

c) $\|T(x_n)\|_2 \leq 4 \cdot \|x_n\|_2 \Rightarrow \|T\| \leq 4$ olur.

$\|(1,0,\dots)\|_2 = 1$ fakat $\|T(1,0,0,\dots)\|_2 = \|(0,4,0,\dots)\|_2 = 4 \Rightarrow$

$\|T\| \geq 4$ dır. $\Rightarrow \|T\| = 4$ olur.

d) $\|T^2(x_n)\|_2^2 = \|(0,0,4x_1,4x_2,4x_3,4x_4,\dots)\|_2^2 = 16 \cdot \|x_n\|_2^2 \Rightarrow$

$\|T^2\| \leq 4$, Ayrıca $\|(1,0,0,\dots)\|_2 = 1$ ve

$\|T^2(1,0,0,\dots)\|_2 = \|(0,0,4,0,\dots)\|_2 = 4 \Rightarrow \|T^2\| \geq 4$

ve böylece $\|T^2\| = 4$ dır.

e) $\|T\| = 4$ idi. Böylece $\|T\|^2 = 16 \neq 4 = \|T^2\| \Rightarrow \|T\|^2 \neq \|T^2\|$ dır.

7 . $\forall t \in [0,1]$ için $e^t \cdot (f(t))^2 \geq 0$ olduğundan $\langle f,f \rangle \geq 0$ dır.

. $\langle f,f \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 e^t (f(t))^2 dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1]$ için $e^t (f(t))^2 = 0$

$\Rightarrow e^t > 0$ old. $f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$, $f \equiv 0$ olur.

$\langle f,f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

. $f,g,h \in C[0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$\langle f+g, h \rangle = \int_0^1 e^t [f(t)+g(t)] h(t) dt$

$= \int_0^1 e^t f(t) h(t) dt + \int_0^1 e^t g(t) h(t) dt = \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle$ dr.

. $\langle \alpha f, g \rangle = \int_0^1 e^t \alpha f(t) g(t) dt = \alpha \int_0^1 e^t f(t) g(t) dt = \alpha \langle f,g \rangle$

. $\langle f,g \rangle = \int_0^1 e^t f(t) g(t) dt = \int_0^1 e^t g(t) f(t) dt = \langle g,f \rangle$.

-o-

$f(t) = t$, $g(t) = 1-t$ ile

$\langle f,g \rangle = \int_0^1 e^t t(1-t) dt = \int_0^1 (t-t^2) e^t dt = (3te^t - 3e^t - t^2 e^t) \Big|_0^1$

$= 3 - e$ (kısmi int. kullanıldı)